**Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике**

**(2020/2021 уч. год)**

**Ответы и решения заданий**

**Общие критерии оценивания каждой задачи:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6-7** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| **5-6** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| **2-3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **0-1** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| **0** | Решение отсутствует. |

**Задания для 9 класса**

**Задача № 1**

*Двое по очереди кладут пятаки на* [*круглый стол*](https://pandia.ru/text/category/kruglie_stoli/) *так, чтобы они не накладывались друг на друга и не выступали за край стола. Про­игрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?*

**Ответ:** выиграет первый.

**Решение.**

Нам нужно найти такую последовательность ходов, которая позволила бы, глядя на ходы сопер­ника, делать ходы, которые привели бы к победе. Как же ходить после хода соперника? Стол круглый, поэтому первый ход: положить пятак в центр доски. А дальше? А дальше — по симметрии, [относительно центра](https://pandia.ru/text/category/otnositelmznaya_tcena/) стола! И понятно, что первый выиграет, так как, если второй нашел место, куда положить свою монетку, то для первого останется свободным место симметричное относительно данного хода соперника. Поэтому его ход будет всегда последним.

### Задача № 2

*Помощник капитана, наблюдавший за погрузкой судна, выкуривал одну трубочку за другой с самого начала погрузки. Когда 2/3 от количества погруженных контейнеров стало равным 4/9 количества непогруженных, и склянки пробили полдень, старый морской волк начал раскуривать очередную трубку. Когда он ее докурил, отношение количества погруженных контейнеров к количеству непогруженных стало обратным отношению, которое было до выкуривания этой трубки. Сколько трубок выкурил второй помощник за время погрузки (считаем, что скорость погрузки, так же как и скорость курения трубок, все время оставалась постоянной.)*

**Ответ:** помощник выкурил 5 трубок.

**Решение.**

Пусть *х* – часть контейнеров, которая была погружена к полудню, а *у* – оставшаяся часть контейнеров. Тогда из условий получаем:

После раскуривания одной трубки соотношение стало обратным, то есть доля погруженных контейнеров стала равняться 3/5, и значит, за это время погрузили 1/5 часть контейнеров. Таким образом, всего помощник капитана выкурил 5 трубок во время погрузки.

### Задача № 3

*Найти g(x), если известно, что*

*f(x+1)=3-2x и f(g(x))=6x-3.*

**Ответ:** *g(x)* = *4-3х*.

**Решение.**

Преобразуем первую функцию к виду . При этом стало понятно как «работает» данная линейная функция на свой аргумент. Она таким же образом будет действовать и на функцию *g(x)*. То есть *f(g(x))*= 5 – 2 *g(x)* = 6*x*-3. Откуда *g(x)* = *4-3х*.

### Задача №4

*Найти площадь фигуры, заданной неравенством*

**|*x*| + |*y*| + |*x-y*|  2**

**Ответ:** площадь фигуры составляет 3 кв.ед.

**Решение.**

Легко видеть, что если точка (***х,у***) удовлетворяет исходному неравенству

|***x*| + |*y*| + |*x-y*|  2**, то и точка (-***х, -у***) будет удовлетворять этому же неравенству, так как **|-*x*| + |-*y*| + |-*x + y*|  2** и **|*x*| + |*y*| + |-(*x-y)*|  2**, или **|*x*| + |*y*| + |*x-y*|  2**. Геометрически это будет означать симметрию фигуры относительно начала координат.

В силу этого построим фигуру в 1 и 2 четвертях координатной плоскости и выполним преобразование центральной симметрии.

Раскроем модуль для точек 1 четверти. При этом возможны два случая:  и . В первом случае получаем  и .

Поэтому имеем треугольник, лежащий под прямой *у = х.*

Во втором случае  и . Поэтому имеем треугольник, лежащий над прямой у = х. Объединяя фигуры, получим квадрат со сторонами, лежащими на координатных осях, и равными 1. Для точек второй четверти возможна только одна ситуация:

.

То есть *х – у*, . Получаем треугольник, образованный осями координат и прямой *у = х -1.* В результате получаем фигуру:

Площадь этой фигуры равна 3 (кв.ед) как площадь двух квадратов со стороной 1 и двух прямоугольных равнобедренных треугольников с катетами 1.

### Задача №5

*Биссектриса прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длины 25 см и 24 см. Найти длину описанной около этого треугольника окружности.*

**Ответ:** длина описанной окружности равна ****

**Решение**

# 

*Х*

*1*

*-1 1*

*у*

*1*

*В*

*N 25*

*24*

*М*

*24*

*А С*

# Опустим из точки М перпендикуляр на гипотенузу. Треугольники *АСМ* и *АМN* равны по гипотенузе и острому углу. Тогда *MN* = 24 см, а по теореме Пифагора *NB* = 7 см. Из подобия прямоугольных треугольников *ABC* и *MNB* получим . Откуда гипотенуза равна 175 см. Но гипотенуза является диаметром описанной окружности, поэтому