**Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике**

**(2020/2021 уч. год)**

**Ответы и решения заданий**

**Общие критерии оценивания каждой задачи:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| **7** | Полное верное решение. |
| **6-7** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| **5-6** | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| **2-3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **0-1** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| **0** | Решение отсутствует. |

**Задания для 11 класса**

**Задача №1.**

**Решение** см. решение задачи №1 для 10 класса**.**

**Задача №2.**

*Двое играют в такую игру: за один ход игрок может прибавить к имеющемуся числу любую из девяти ненулевых цифр, от 1 до 9, и сообщить получившуюся сумму своему партнеру, который делает аналогичный ход. Вначале дано число 0. Выиграет тот, кто первым получит в сумме а) 100; б) 66. Кто выигрывает при правильной игре? Как нужно играть, чтобы выиграть?*

**Решение:** а) Выигрывает второй, так как он может называть числа, которые будут делиться на 9 + 1 = 10, т. е. при своем ходе завершать каждый десяток.

б) Понятно, что сейчас выигрышная стратегия есть уже у первого игрока. Остаток от деления числа 66 на 9 + 1 = 10 равен 6. Первый игрок первым ходом должен назвать число 6, а потом последующими ходами будет называть числа, оканчивающиеся на 6. После седьмого хода им будет названо число 66.

**Задача №3**

*Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.*

*а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.*

*б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.*

**Ответ: 8.**

**Решение**

а) Пусть О — центр окружности, вписанной в треугольник *ABC* со *сторонами АВ = АС = 49, ВС = 34, АН* — высота треугольника, точки *М* и *N* — середины сторон АВ и АС соответственно, K — точка пересечения АН и MN, p — полупериметр треугольника ABC. Поскольку MN — средняя линия равнобедренного треугольника, точка K — общая середина MN и АН.

Из прямоугольного треугольника АВН находим, что

,

значит, 

А

М К N

О

В Н С

Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Тогда

,

а диаметр вписанной окружности равен . Очевидно, , значит

Следовательно, вписанная окружность пересекает среднюю линию MN треугольника.

б) Для вычисления длины отрезка средней линии введем систему координат на плоскости следующим образом: Ось ОХ направим по основанию треугольника, а ось ОУ по высоте. Тогда вписанная в треугольник окружность будет задана уравнением

. А средняя линия треугольника будет задана уравнением . Подставляя данное значение в уравнение окружности, получим значения  и . Таким образом длина отрезка средней линии внутри окружности равна 8.

**Задача №4**

*Пусть *. *Вычислите выражение*

..….

**Ответ: **

**Решение.**

В искомом произведении рассмотрим n-й множитель. Он равен

.

Подставляя эту дробь при n = 1, 2, …, 2019 в произведение и произведя сокращения , получим

.

**Задача №5**

*Найдите все значения a, при которых уравнение*

**

*имеет на отрезке ровно два решения.*

**Ответ: **

**Решение.**

Пусть , тогда уравнение запишется в виде , откуда или . Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений или .

Исследуем, сколько решений на отрезке  имеет уравнение в зависимости от *b*. На промежутке функция принимает каждое неотрицательное значение один раз, на промежутке функция принимает каждое значение один раз. Таким образом, уравнение  имеет на отрезке два решения при и одно решение при .

Уравнения  и  могут иметь общие решения при , то есть при и . При ба уравнения принимают вид и имеют два решения на отрезке . При  оба уравнения принимают вид и имеют одно решение на отрезке .

При других значениях *a* исходное уравнение имеет ровно два решения на отрезке , если оба уравнения  и имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

,

то есть .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения на отрезке при ;  и при 