Решения задач

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

6 класс

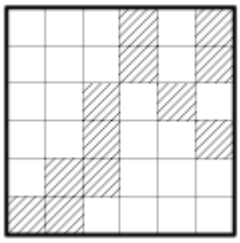
1. В озере растут лотосы. За сутки каждый лотос делится пополам, и вместо одного лотоса появляются два. Ещё через сутки каждый из получившихся лотосов делится пополам и так далее. Через 30 суток озеро полностью покрылось лотосами. Через какое время озеро было заполнено наполовину?

   Решение. Если вы прочтёте условие задачи внимательно, то поймёте, что озеро было заполнено наполовину через 29 суток. За сутки до того, как озеро заполнится, оно будет заполнено ровно наполовину.

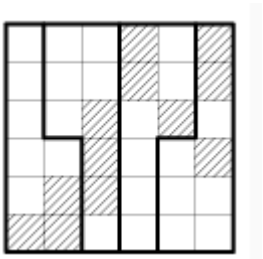
   Ответ. Через 29 суток.

   Замечание: Если участник прямо указал, что каждый день лотосов становится в 2 раза больше, чем накануне – 3 балла.

2. Разрежьте изображённую на рисунке доску на четыре одинаковые части, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.



   Решение. См. рисунок.



   Замечание: За любое решение, удовлетворяющее не всем условиям (не все части одинаковые, не все содержат по 3 заштрихованные клетки) –

0 баллов. Если участник догадался разрезать доску пополам по вертикали – 2 балла.

3. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется – определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

Решение. а) Лиса раскладывает конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну конфет, и они не будут жаловаться. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, ей придётся съесть ещё 70 конфет.

б) Покажем, что число конфет, съеденных Лисой, всегда чётно (и поэтому не может быть равным 65). В итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому суммарное число конфет, съеденных медвежатами, чётно. Так как 100 – чётное число, то Лиса также съела чётное число конфет.

Ответ. а) 10, 10 и 80; б) нет.

Замечание: Если решен только п. а) – 3 балла, если только п. б) – 4 балла. Можно показать, что решение в п. а) – единственный способ действия Лисы. В самом деле, поскольку в итоге лиса съест 80 конфет, то медвежата съедят по (100-80)/2=10 конфет. Так как у одного из медвежат количество конфет не менялось, то в кучке, доставшейся ему по жребию, было 10 конфет. Следовательно, какая бы кучка ни досталась Лисе по жребию, среди двух оставшихся обязательно есть кучка из 10 конфет. То есть кучек по 10 конфет по крайней мере две (если бы такая кучка из 10 конфет была лишь одна, то она по жребию

могла достаться Лисе, и среди двух оставшихся не нашлось бы кучки из 10 конфет). Следовательно, Лиса может разложить конфеты по кучкам так, чтобы в итоге получить ровно 80 конфет, единственным способом. Если п. б) не решен, но доказана единственность решения в п. а) – 5 баллов.

4. Известно, что ЖЖ+Ж=МЁД. На какую цифру оканчивается произведение: В·И·Н·Н·И·П·У·Х (разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми – одинаковые)?

Решение. Так как к двузначному числу ЖЖ прибавили однозначное число Ж и получили трёхзначное, то Ж=9, а МЁД=108. Уже использованы 4 цифры. В произведении В·И·Н·Н·И·П·У·Х использованы 6 других цифр. Следовательно, среди них обязательно есть цифры 2 и 5, значит, это произведение оканчивается на 0.

Ответ. На 0.

Замечание: Если дан правильный ответ без объяснения – 0 баллов. Если найдены значения букв из равенства – 3 балла. Если доказано, что в произведении участвуют цифры 2, 3, 4, 5, 6 и 7, но решение не доведено до конца – 4 балла.